

Grawitacja

Obliczyć wysokość na jaką wzniesie się ciało rzucone na Księżycu pionowo do góry z prędkością $v=1000$ m/s?

Druga prędkość kosmiczna dla Księżyca ma wartość $v_{||}=2,38$ km/s.

Promień Księżyca jest równy $R=1737$ km.

Zadanie - **Pierwsza prędkość kosmiczna**

Grawitacja

- Dane
- $v=1000$ m/s
- $v_{||}=2,38$ km/s
- $R=1737$ km
- E_1 – energia na powierzchni Księżycy
- E_2 – energia na maksymalnej wysokości
- Inne zadanie
Pierwsza prędkość kosmiczna

$$E_1 = E_2$$

$$E = E_p + E_k$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Grawitacja

- E_p – energia grawitacyjna potencjalna w polu centralnym
- E_k – energia kinetyczna
- Wyjaśnienia
Energia kinetyczna
- Grawitacja - ruch satelity i energia potencjalna
Grawitacja - ruch satelity

$$E_1 = E_{p;1} + E_{k;1}$$

$$E_2 = E_{p;2} + E_{k;2}$$

$$E_{p;1} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R}$$

$$E_{k;1} = \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Grawitacja

- h – wysokość na jaką może wznieść się ciało
- Prędkość na wysokości h jest równa zero
- Jak obliczamy energię potencjalną
Energia potencjalna grawitacyjna w polu centralnym

$$E_{p;2} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R+h}$$

$$E_1 = E_{p;1} + E_{k;1}$$

$$E_{k;2} = 0$$

$$E_2 = E_{p;2} + E_{k;2}$$

Grawitacja

- $v=1000$ m/s
- $v_{||}=2,38$ km/s
- $R=1737$ km
- Porównanie energii na powierzchni Księżyca i na maksymalnej wysokości

$$E_1 = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R} + \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

$$E_2 = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R+h}$$

$$-G \cdot \frac{M \cdot m}{R} + \frac{m \cdot v_0^2}{2} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R+h}$$

Grawitacja

- $v=1000$ m/s
- $v_{||}=2,38$ km/s
- $R=1737$ km
- Masę ciała można skrócić – wynik będzie uniwersalny (dla każdego ciała)
- G – stała grawitacji

$$-G \cdot \frac{M \cdot m}{R} + \frac{m \cdot v_0^2}{2} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R+h}$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{R} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R+h}$$

$$G \cdot \frac{M}{R} - \frac{v_0^2}{2} = G \cdot \frac{M}{R+h}$$

Grawitacja

- $v=1000$ m/s
- $v_{||}=2,38$ km/s
- $R=1737$ km
- Dzielimy obie strony przez G i przez M
- M – masa Księżyca
- R – promień Księżyca

$$G \cdot \frac{M}{R} - \frac{v_0^2}{2} = G \cdot \frac{M}{R+h}$$

$$\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2 \cdot M \cdot G} = \frac{1}{R+h}$$

$$\frac{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R}{2 \cdot M \cdot G \cdot R} = \frac{1}{R+h}$$

Grawitacja

- Obliczamy h –
nie mamy
jeszcze
wyrażenia
zawierającego
dane z zadania

$$\frac{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R}{2 \cdot M \cdot G \cdot R} = \frac{1}{R + h}$$

$$R + h = \frac{2 \cdot M \cdot G \cdot R}{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R}$$

$$h = \frac{2 \cdot M \cdot G \cdot R}{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R} - R$$

Grawitacja

- Wykorzystujemy zależność na obliczenie drugiej prędkości kosmicznej – równość wartości energii potencjalnej i energii kinetycznej

$$h = \frac{2 \cdot M \cdot G \cdot R}{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R} - R$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{R} = \frac{m \cdot v_{II}^2}{2}$$

$$G \cdot \frac{M}{R} = \frac{v_{II}^2}{2}$$

Grawitacja

- Mamy wyrażenie na kwadrat II prędkości kosmicznej dla Księżyca –
wyeliminujemy masę Księżyca i stałą grawitacji

$$h = \frac{2 \cdot M \cdot G \cdot R}{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R} - R$$

$$G \cdot \frac{M}{R} = \frac{v_{II}^2}{2}$$

$$v_{II}^2 = 2 \cdot G \cdot \frac{M}{R}$$

Grawitacja

- Zamiast iloczynu liczby 2, masy, stałej grawitacji i promienia Księżyca mamy iloczyn kwadratu II prędkości kosmicznej i kwadratu promienia Księżyca

$$h = \frac{2 \cdot M \cdot G \cdot R}{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R} - R$$

$$v_{II}^2 \cdot R^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot R$$

$$h = \frac{v_{II}^2 \cdot R^2}{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R} - R$$

Grawitacja

- $v=1000$ m/s
- $v_{II}=2,38$ km/s
- $R=1737$ km
- Wyliczamy teraz podwojony iloczyn stałej grawitacji i masy Księżyca

$$h = \frac{v_{II}^2 \cdot R^2}{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R} - R$$

$$v_{II}^2 \cdot R^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot R$$

$$v_{II}^2 \cdot R = 2 \cdot G \cdot M$$

Grawitacja

- Podstawiamy zamiast iloczynu liczby 2, stałej grawitacji i masy Księżyca iloczyn kwadratu drugiej prędkości kosmicznej i promienia Księżyca

$$h = \frac{v_{II}^2 \cdot R^2}{2 \cdot M \cdot G - v_0^2 \cdot R} - R$$

$$v_{II}^2 \cdot R = 2 \cdot G \cdot M$$

$$h = \frac{v_{II}^2 \cdot R^2}{v_{II}^2 \cdot R - v_0^2 \cdot R} - R$$

Grawitacja

- $v=1000$ m/s
- $v_{II}=2,38$ km/s
- $R=1737$ km
- Skracamy przez promień Księżyca
- Sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$h = \frac{v_{II}^2 \cdot R^2}{v_{II}^2 \cdot R - v_0^2 \cdot R} - R$$

$$h = \frac{v_{II}^2 \cdot R}{v_{II}^2 - v_0^2} - \frac{v_{II}^2 \cdot R - v_0^2 \cdot R}{v_{II}^2 - v_0^2}$$

Grawitacja

- $v=1000$ m/s
- $v_{II}=2,38$ km/s
- $R=1737$ km
- Zredukują się wyrażenia w liczniku ułamka

$$h = \frac{v_{II}^2 \cdot R}{v_{II}^2 - v_0^2} - \frac{v_{II}^2 \cdot R - v_0^2 \cdot R}{v_{II}^2 - v_0^2}$$

$$h = \frac{v_{II}^2 \cdot R - v_{II}^2 \cdot R + v_0^2 \cdot R}{v_{II}^2 - v_0^2}$$

Grawitacja

- Mamy proste wyrażenie na wysokość lotu ciała rzuconego z prędkością v_0 pionowo w górę

$$h = \frac{v_{II}^2 \cdot R - v_{II}^2 \cdot R + v_0^2 \cdot R}{v_{II}^2 - v_0^2}$$

$$h = \frac{v_0^2 \cdot R}{v_{II}^2 - v_0^2}$$

Grawitacja

- Końcowe wyrażenie na wysokość lotu ciała – zależy tylko od promienia Księżyca, prędkości rzutu i drugiej prędkości kosmicznej

$$h = \frac{v_0^2 \cdot R}{v_{II}^2 - v_0^2}$$

$$h = R \cdot \frac{v_0^2}{v_{II}^2 - v_0^2}$$

Grawitacja

- Wysokość jest skończona dla wszystkich prędkości mniejszych od drugiej prędkości kosmicznej

$$h = R \cdot \frac{v_0^2}{v_{II}^2 - v_0^2}$$